El modelo de Mankiw-Romer-Weil con tasa de crecimiento de la población decreciente *†

Juan Gabriel Brida‡and Gastón Cayssials§

Resumen

En este trabajo se estudia una extensión del modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil al apartarse del supuesto estándar de la tasa de crecimiento de la población constante. Más concretamente, se asume que esta tasa es decreciente en el tiempo y se introduce una ley general de crecimiento de la población que verifica esta característica. Con esta especificación, el modelo puede ser representado por un sistema dinámico de dimensión tres, que admite una única solución para cualquier condición inicial. Se muestra que existe un equilibrio no trivial único que es un atractor global. Además, se caracteriza a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, mostrando que en este modelo la velocidad es inferior a la del modelo original de Mankiw-Romer-Weil.

Palabras Claves: Modelo de crecimiento económico de Mankiw-Romer-Weil; tasa de crecimiento de la población decreciente; velocidad de convergencia.
JEL clasificación: C62; O41

1 Introdución

En el modelo desarrollado por Mankiw, Romer y Weil [30]-también conocido como el modelo de Solow ampliado con capital humano, la fuerza de trabajo (asociado con el tamaño de la población) crece a una tasa constante $n > 0$. Este supuesto, normalmente utilizado

*Nuestra investigacin fue apoyada por el CSIC-UDELAR (proyecto “Grupo de investigación en Dinámica Económica”; ID 881928).

†Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en el Workshop “Advances in Dynamic Macroeconomics”; celebrado en Free University of Bozen-Bolzano, Italia, entre el 17 de mayo y el 21 de mayo de 2016.

‡Departamento de Métodos Cuantitativos - Facultad de Ciencias Económicas y de Administración - Universidad de la República (Uruguay). Email: gbrida@ccee.edu.uy

§Departamento de Métodos Cuantitativos - Facultad de Ciencias Económicas y de Administración - Universidad de la República (Uruguay). Email: gacayssials@gmail.com

en los modelos de crecimiento clásicos (Solow [34], Ramsey[33] - Cass[12] -Koopmans [29] entre otros) implica que la población crece de forma exponencial, es decir, si la población inicial es P_0, la población en el momento t es $P(t) = P_0e^{nt}$. Suponer que la población crece exponencialmente implica que no hay límite para el tamaño de la población (la población tiende a infinito cuando t tiende a infinito). Este supuesto es claramente no es sostenible, ni se ajusta a los datos empíricos de los ultimos cien años [35].

El modelo exponencial se ajusta bien a la dinámica de la población en los períodos iniciales, pero es incapaz de reflejar la caída en la tasa de crecimiento debido a una tasa de fertilidad inferior. Verhulst[36] muestra que debe haber un límite superior para el tamaño de una población, llamada capacidad de carga del entorno, un nivel máximo de población que un ambiente puede soportar hasta que es incapaz de sostener y alimentar la actividad humana.

Varios expertos (Daily[15], Brown[10]) afirman que la humanidad está cerca de ese límite. De acuerdo con los datos de Naciones Unidas [35] la tasa de crecimiento de la población se ha reducido en promedio en los últimos cien años y es cercana al 1%. Por otra parte las proyecciones para los próximos años es que está tendencia continuará debido a menores tasas de fertilidad. En resumen, los datos empíricos revelan dos hechos estilizados: i) la población no crece a un tasa constante, y ii) esta tasa disminuye y es cercana a cero.

Maynard [31] propone las siguientes propiedades que caracterizan a una ley de la población que verifica estos hechos estilizados:

1. La población crece, pero se ve limitada por un tamaño máximo, la capacidad de carga del entorno P_∞:
$$\dot{P}(t) \geq 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = P_\infty$$
2. la tasa de crecimiento de la población disminuye a cero, es decir, $n(t) = \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$ disminuye a cero:
$\dot{n}(t) < 0, \forall t$ y $\lim_{t\to+\infty} n(t) = 0$

La ecuación logística, la ecuación Verhulst, la ecuación de Richards y la ecuación de Von Bertalanffy son ejemplos de leyes de la población normalmente utilizados por los demógrafos y sociólogos que verifican estas propiedades[13].

En este trabajo se analiza el modelo de Mankiw-Romer-Weil modificando la hipótesis de un crecimiento exponencial mediante la introducción de una ley de la población en general que safisface las propiedades mencionadas anteriormente. La reformulación de los modelos clásicos de crecimiento ya ha sido estudiado para el modelo de Solow (usando la ley logística [14], [38], usando la ecuación de Richards [6], la ecuación de von Bertalanffy [8], población acotada [11], o una ley general de población que verifica las propiedades antes mencionadas [9]) y para el modelo de Ramsey (usando la ecuación logística [4], [16], [18], [21], [26], [27], [1] o la ecuación de von Bertalanffy law [3], [22], [23], [24], [25], o la ecuación de Richards [2], [17], o una ley general de población [19], [20],[7]). En este trabajo se generaliza el análisis de Guerrini[28], donde el autor modifica el modelo M-R-W mediante la introducción de la ley logística de la población.

El modelo propuesto por Mankiw, Romer y Weil en 1992 marca un hito en el resurgimiento de los modelos neoclásicos de crecimiento en los años 90 y su trabajo es una de las piezas más influyentes y ampliamente citado en la literatura empírica sobre el crecimiento. Al considerar una definición más amplia de capital, el modelo predice una menor tasa de convergencia[1] al equilibrio que la tasa del modelo de Solow. Esto implica que la velocidad de convergencia es menor, y que el modelo de Mankiw-Romer-Weil ajusta se mejor a los datos empíricos que el modelo original de Solow. Este resultado, junto con la aparición de modelos de crecimiento endógeno, promovió el desarrollo de una línea de investigación empírica que se centró en la convergencia y la dispersión ($\sigma-$convergencia) del producto per cápita entre los países, grupo de países o regiones de un mismo país. En todas estas obras el modelo de Mankiw-Romer-Weil es un pilar fundamental. Teniendo en cuenta que la introducción de una ley alternativa de crecimiento de la población implica cambios en la velocidad de convergencia al equilibrio, el presente estudio puede ser visto como una contribución a esta línea de investigación empírica.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta el modelo. Se muestra la existencia y unicidad del equilibrio no trivial y se analiza la estabilidad del equilibrio, en la sección 3 se presenta el modelo modificado. En la Sección 4 se estudia la velocidad de convergencia y la dinámica de transición del modelo. Finalmente, en la sección 5 presentan algunas conclusiones.

2 El Modelo

2.1 El Modelo original de Mankiw-Romer-Weil

Comenzamos introduciendo el modelo original Mankiw-Romer-Weil con ley de crecimiento de la población exponencial y el análisis de las principales propiedades dinámicas del modelo (ver [30] por una descripción mas detallada del modelo.)

Se considera una economía cerrada, con un único sector productivo, que utiliza el capital físico ($K(t)$), la fuerza de trabajo ($L(t)$) y capital humano ($H(t)$, entendido como capacidades, competencias y habilidades de los trabajadores individuales) como factores de producción ($Y(t)$). La economía está dotada de una tecnología definida por una función de

[1] o $\beta-$convergencia, definida como el tiempo que demora una economía en alcanzar el equilibrio

producción de Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala:

$$Y(t) = K^{\alpha}(t)H^{\beta}(t)L^{1-\alpha-\beta}(t),\ \alpha, \beta, \alpha+\beta \in (0,1)$$

El cambio en el stock de capital físico $\dot{K}$ es igual a la inversión bruta $I_k = s_k Y(t)$ menos la depreciación del capital δK :

$$\dot{K} = s_k Y(t) - \delta K(t) \tag{1}$$

El cambio en el stock de capital humano $\dot{H}$ es igual a la inversión bruta $I_h = s_h Y(t)$ menos la depreciación del capital δH :

$$\dot{H} = s_h Y(t) - \delta H(t) \tag{2}$$

El modelo asume que la población crece a una tasa constante $n > 0$:

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = nL(t) \\ L(0) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

En terminos per cápita la función de producción se puede expresar como:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{K^{\alpha}(t)H^{\beta}(t)L^{1-\alpha-\beta}(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}\left(\frac{H(t)}{L(t)}\right)^{\beta} = y(t) \tag{4}$$

Si definimos a $K/L = k$ como el capital físico por trabajador y a $H/L = h$ como el capital humano por trabajador. El producto per cápita es:

$$y(t) = k^{\alpha}(t)h^{\beta}(t) \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{k} = \frac{d(\frac{K(t)}{L(t)})}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \tag{6}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{L}\frac{1}{(K/L)} - \frac{kn}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - n \tag{7}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k Y(t) - \delta K(t)}{K(t)} - n = \frac{s_k k^{\alpha}(t)h^{\beta}(t)L(t)}{K(t)} - \delta - n \tag{8}$$

se tiene que, la tasa de crecimiento del capital físico por trabajador es:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^{\alpha}(t)h^{\beta}(t)}{(K(t)/L(t))} - \delta - n \tag{9}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t)}{k(t)} - (\delta + n) \tag{10}$$

Así, la acumulación de capital físico por trabajador está dada por:

$$\dot{k} = s_k k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + n) k(t) \tag{11}$$

Por un razonamiento similar, se llega a la ecuación que describe la acumulación de capital humano per cápita:

$$\dot{h} = s_h k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + n) h(t) \tag{12}$$

A continuación, el sistema dinámico de dimensión dos:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_k k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + n) k(t) \\ \dot{h} = s_h k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + n) h(t) \end{cases} \tag{13}$$

describe la dinámica del modelo.

El equilibrio no trivial es el punto (k^*, h^*) es tal que:

$$\begin{cases} k^* = \left[\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{\delta+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{\delta+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \end{cases} \tag{14}$$

y el producto de equilibrio es:

$$y^* = (k^*)^{\alpha}(h^*)^{\beta} = \left[\frac{s_k}{\delta + n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{s_h}{\delta + n}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Luego, los valores de equilibrio de largo plazo del capital (físico y humano) y el producto, dependen positivamente de las tasas de ahorro (s_k, s_h) y del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles (α, β) y negativamente de la tasa de depreciación (δ) y del crecimiento de la población (n).

Con el fin de analizar la estabilidad del estado estacionario se considera la aproximación lineal de la función $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$G(k, h) = \big(s_k k^{\alpha} h^{\beta} - (\delta + n)k, s_h k^{\alpha} h^{\beta} - (\delta + n)h\big)$$

Que brinda la aproximación de primer orden del modelo como:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k, h)$$

La dinámica de la transición al equilibrio (k^*, h^*) puede ser cuantificada a travez de la linealización del sistema:

$$\left(\begin{array}{c} \dot{k} \\ \dot{h} \end{array} \right) = G(k^*, h^*) + J_G \left(\begin{array}{c} k - k^* \\ h - h^* \end{array} \right) = J_G \left(\begin{array}{c} k - k^* \\ h - h^* \end{array} \right)$$

donde J_G es la matrix jacobiana de G evaluada en el equilibrio.

$$J_G = \left(\begin{array}{cc} s_k \alpha \frac{(\delta+n)}{s_k} - (\delta + n) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta + n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta + n) & s_h \beta \frac{(\delta+n)}{s_h} - (\delta + n) \end{array} \right)$$

$$J_G = \left(\begin{array}{cc} (\delta + n)(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta + n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta + n) & (\delta + n)(\beta - 1) \end{array} \right)$$

El polinomio característico de la matrix jacobiana es:

$$P(X) = (\delta + n)^2 (1 - \alpha - \beta) - (\alpha + \beta - 2)(\delta + n) X + X^2$$

que presenta dos autovalores negativos: $\lambda_1 = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1)$ y $\lambda_2 = -(\delta + n)$. Esto implica que el equilibrio es un atractor global.

Obs. 1. *La velocidad de convergencia esta determinada por el menor de los autovalores en valor absoluto, esto es, por $\lambda_1 = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1)$. Una de las características del modelo es que la velocidad de convergencia es menor que en el modelo de Solow[2]. Esto implica que el modelo de Mankiw-Romer-Weil ajusta mejor a los datos empíricos que el modelo de Solow (ver [5] cap.* 1*).*

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (presentadas en el trabajo seminal [30]) es introducir una aproximación log-lineal del sistema 13:

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\delta + n) \left[(\alpha - 1)(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta (\bar{h} - \bar{h}^*) \right] \\ \dot{\bar{h}} = (\delta + n) \left[\alpha (\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)(\bar{h} - \bar{h}^*) \right] \end{cases} \tag{15}$$

y sustituir en $\frac{d(log(y))}{dt} = \dot{\bar{y}} = \alpha \dot{\bar{k}} + \beta \dot{\bar{h}}$

$$\dot{\bar{y}} = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1) [\bar{y} - \bar{y}^*] = \lambda_1 [\bar{y} - \bar{y}^*]$$

Notar que en este caso la velocidad de convergencia puede ser interpretada como la velocidad a la que una economía se acerca al equilibrio en el instante t, resolviendo esta ecuación diferencial el producto se puede escribir como:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(0) e^{\lambda_1 t} + (1 - e^{\lambda_1 t}) \bar{y}^*$$

[2]La velocidad de convergencia que predice el modelo de Solow es: $(\delta + n)(\alpha - 1)$

y remplazando $\bar{y}^*$ por su valor de equilibrio, $\bar{y}^* = \alpha\bar{k}^* + \beta\bar{h}^*$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$log(y(t)) - log(y(0)) = -(1-e^{\lambda_1 t})log(y(0)) + (1-e^{\lambda_1 t})\left[\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}log(\frac{s_k}{\delta+n}) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}log(\frac{s_h}{\delta+n})\right]$$

Esta ecuación es la que se utiliza para estimar la velocidad de convergencia en los estudios empíricos de crecimiento. En particular, para contrastar lo que en la literatura sobre el crecimiento que se conoce como *hipótesis de convergencia*, es decir, existe una relación negativa entre la distancia al equilibrio y la velocidad de convergencia.

2.2 El modelo de Mankiw-Romer-Weil modificado por una tasa de crecimiento de la población decreciente

En el modelo anterior, se sustituye la ley de crecimiento de la población $\dot{L}(t) = nL(t)$ por una ley $\dot{L}(t) = p(t)L(t)$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $L(0) = L_0 > 0, \dot{L}(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ y $\lim_{t \longrightarrow +\infty} L(t) = L_\infty$.
   Población creciente y acotada.

2. Si $p(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ entonces: $\dot{p}(t) < 0, \forall t \geq 0$ y $\lim_{t \longrightarrow +\infty} p(t) = 0$
   La tasa de crecimiento de la población es decreciente y tiende a 0.

Ejemplos de algunas leyes de población que verifican estas propiedades se muestran en la siguiente tabla 1:

Table 1: Ejemplos de leyes de Población

Ley de Población		$L(t)$	$p(t)$
Logística [13]	$\dot{L} = aL - bL^2$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{aL_0e^{at}}{a+bL_0(e^{at}-1)}$	$\frac{a(a-bL_0)}{a-bL_0(e^{at}-1)}$
Verhulst [36]	$\dot{L} = rL(1-\frac{L}{L_\infty})$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{L_0L_\infty e^{rt}}{L_0e^{rt}+L_\infty-L_0}$	$\frac{r(L_\infty-L_0)}{e^{rt}+L_\infty-L_0}$
Von Bertalanffy [37]	$\dot{L} = r(L_\infty - L)$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{e^{rt}L_\infty+L_0-L_\infty}{e^{rt}}$	$\frac{r(L_\infty-L_0)}{L_0-L_\infty+L_\infty e^{rt}}$

Después de sustituir la ley exponencial por la ecuación $\dot{L}(t) = p(t)L(t)$ y repitiendo los pasos de la subsección anterior, el sistema dinámico que describe el modelo modificado puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden 3:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_k k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + p(L(t)))k(t) \\ \dot{h} = s_h k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + p(L(t)))h(t) \\ \dot{L}(t) = L(t)p(L(t)) \end{cases} \tag{16}$$

3 Equilibrio y estabilidad: análisis cualitativo

3.1 El estado estacionario

En esta sección investigamos el comportamiento dinámico de la solución del modelo $(k(t), h(t), L(t))$.

Lema 2. *Si se excluye la solución trivial que se obtiene de considerar $k = 0$, $h = 0$ y $L = 0$, se tiene que el modelo admite un único equilibrio positivo (k^*, h^*, L^*) que verifica:*

$$\begin{cases} k^* = \left[\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_{\infty} \end{cases} \tag{17}$$

Proof. La demostración es inmediata resolviendo el sistema (15) buscando una solución constante. ∎

Obs. 3. *Los valores de k^*, h^* y y^* coinciden von los valores del modelo original de Mankiw-Romer-Weil cuando $n = 0$. Esto implica que los valores de equilibrio del modelo modificado son mayores que los del modelo original, (es decir, si $n = 0$; ver la ecuación* (14) *) y los parámetros de la la ley población no entran en los determinantes de k^*, h^* y y^*. los valores en el estado estacionario del capital físico y capital humano dependen sólo de los parámetros de tecnología α, β y δ y de las tasas de ahorro exógenas, s_k y s_h. Está es una diferencia importante con respecto al modelo original, donde un aumento en la tasa intrínseca de crecimiento de la población conduce a los leves bajas de estas variables en el largo plazo. Además, ya que en el modelo, el tamaño de la población es limitada por la capacidad de carga $L^* = L_{\infty}$, los valores agregados del capital físico y humano en el largo plazo son finitos e iguales a $K^* = L^* k^*$ y $H^* = L^* h^*$ respectivamente (donde en el modelo original de Mankiw-Romer-Weil son infinito).*

Proposición 4. *El equilibrio del estado estacionario (k^*, h^*, L^*) es un atractor global.*

Proof. A partir del sistema (16) :

$$\begin{cases} \dot{k} = s_k k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + p(L(t)))k(t) \\ \dot{h} = s_h k^{\alpha}(t) h^{\beta}(t) - (\delta + p(L(t)))h(t) \\ \dot{L}(t) = L(t)p(L(t)) \end{cases} \tag{18}$$

Para analizar la estabilidad del estado estacionario consideramos la aproximación lineal de la función $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M(k,h,L) = \big(s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L)k, s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L))h, Lp(L)\big)$$

cerca del punto de equilibrio (k^*, h^*, L^*). La matrix Jacobiana de la aproximación lineal está dada por:

$$J_M = \begin{pmatrix} \delta(\alpha-1) & \frac{s_k}{s_h}\beta\delta & k^* p\prime(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k}\alpha\delta & \delta(\beta-1) & h^* p\prime(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p\prime(L_\infty) \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matrix es:

$$R(X) = (L_\infty p\prime(L_\infty) - X)((\delta(\alpha-1) - X)(\delta(\beta-1) - X) - \alpha\beta\delta^2) \tag{19}$$

El polinomio presenta tres autovalores negativos: $\lambda_1 = \delta(\alpha+\beta-1) < 0$, $\lambda_2 = -\delta < 0$ y $\lambda_3 = L_\infty p\prime(L_\infty) < 0$. Implica que el equilibrio es un atractor global. ∎

4 Transición dinámica y velocidad de convergencia

El modelo de Mankiw-Romer-Weil es una buena aproximación del mundo real, demostró ser más robusto empíricamente, ajusta mejor a los datos empíricos, que el modelo de Solow, sin embargo la realidad económica que describe es incompleta. En el modelo modificado la dinámica es mas rica.

La dinámica de la transición en las proximidades del equilibrio de largo plazo (k^*, h^*, L^*) puede ser cuantificado mediante la linealización del sistema (16):

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \\ \dot{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\alpha-1) & \frac{s_k}{s_h}\beta\delta & k^* p'(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k}\alpha\delta & \delta(\beta-1) & h^* p'(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p'(L_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \\ L - L_\infty \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz que representa este sistema lineal tiene tres autovalores negativos: $\lambda_1 = \delta(\alpha+\beta-1) < 0$, $\lambda_2 = -\delta < 0$ y $\lambda_3 = L_\infty p^{'}(L_\infty) < 0$.

En esta sección se proporciona una evaluación cuantitativa de la velocidad de convergencia de la dinámica de transición. La velocidad depende de los parámetros de la tecnología , las tasa de ahorro y los parámetros de la población y se pueden calcular a partir de la matriz $J_M\,(k^*, h^*, L_\infty)$. Los autovalores λ_1 y λ_2 son análogos a los coeficientes de convergencia del modelo original cuando la tasa de crecimiento de la población es nula. El autovalor $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty)$ corresponde a la velocidad de convergencia de la población a la capacidad de carga del entorno L_∞. Cada valor propio corresponde a una fuente de convergencia y cada ruta de transición estable a la constante estado del sistema toma la forma:

$$\begin{cases} k(t) = k^* + C_1 v_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{21} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{31} e^{L_\infty (p'(L_\infty) t} \\ h(t) = h^* + C_1 v_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{32} e^{L_\infty (p'(L_\infty) t} \\ L(t) = L_\infty + (L_0 - L_\infty)\, e^{L_\infty (p'(L_\infty)) t} \end{cases} \tag{20}$$

Donde $C_1, C_2, C_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}$ y v_{32} depende de las condiciones iniciales y de los coeficientes de $J_M\,(k^*, h^*, L_\infty)$. Entonces la velocidad de convergencia de capital físico y humano depende de los autovalores $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1)$ y $L_\infty p'(L_\infty)$. Tenga en cuenta que, al ser la ley de población dada exógenamente, la velocidad de convergencia de la población solamente depende de $L_\infty p'(L_\infty)$. De hecho, la transición depende del mayor autovalor en valor absoluto. Si $|L_\infty p'(L_\infty)| < |\lambda_1|$, entonces la velocidad de convergencia de $L(t)$ es más rápida que la de $k(t)$ y $h(t)$ y si $|L_\infty p'(L_\infty)| > |\lambda_1|$ entonces todas las variables convergen a la velocidad $L_\infty p'(L_\infty)$.

Obs. 5. *Independientemente de si la velocidad de convergencia es λ_1 (sólo depende del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles y de la tasa de depreciación) o λ_3 (sólo depende de la ley de población), en ambos casos, es menor que en el modelo original.*

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (tal como se presenta en el artículo seminal [30]), en particular la velocidad de convergencia en este nuevo marco, es introducir la aproximación log-lineal del sistema (16):

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\alpha - 1)\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{h}} = \alpha\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{L}} = p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \end{cases} \tag{21}$$

y sustituir en $\frac{d(log(y)}{dt} = \dot{\bar{y}} = \alpha\dot{\bar{k}} + \beta\dot{\bar{h}}$

$$\dot{\bar{y}} = \delta(1 - \alpha - \beta)(\bar{y} - \bar{y}^*) - (\alpha + \beta)p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*)$$

Si se resuelve esta ecuación diferencial (especificando una ley de población), se obtiene la ecuación para estimar empíricamente la tasa de convergencia en este nuevo marco.

5 Concluciones

En la teoría del crecimiento económico se suele suponer que el crecimiento de la población sigue una ley exponencial. Esto, claramente no es realista porque implica que la población tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito. En este estudio una versión mejorada del modelo de crecimiento Mankiw-Romer-Weil se desarrolla mediante la introducción de una ley general de población.

El modelo se presenta como un sistema dinámico de dimensión tres, que es compatible con un equilibrio único distinto del trivial, que es, como en el modelo original, un atractor global. En los valores de equilibrio del modelo modificadas el producto, el capital físico y el capital humano per cápita dependerán del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles (α, β), de la tasa de depreciación (δ) y de las tasas de ahorro (s_k, s_h), pero no dependen de los parámetros de la población. Además sus valores son mayores que el modelo clásico, sea cual sea la velocidad constante $n > 0$ de crecimiento de la población

En el equilibrio del modelo clásico de Mankiw-Romer-Weil, el capital físico y humano agregados tienden a infinito de forma poco realista cuando t tiende a el infinito, porque la población crece hasta el infinito. Esta situación se mejora en el modelo modificado, donde los valores agregados de equilibrio del capital físico y humano tienden a los valores finitos $K^* = L_\infty k^*$ y $H^* = L_\infty h^*$.

Por último, el documento muestra que el modelo tiene una velocidad finita de convergencia, que sólo depende de los parámetros de la tecnología y de la tasa de depreciación o de la ley de la población, pero no ambos, y, en cualquier caso, es menor que en el modelo original.

Una investigación futura puede incluir el modelado de la población por una ecuación que dependa de otras variables del modelo; es decir, endogeneizar población.

Una segunda línea de investigación es analizar el modelo modificado en tiempo discreto. Los estudios empíricos basados en el modelo M-R-W suponen implícitamente que las propiedades dinámicas en tiempo continuo son los mismos que en tiempo discreto, sin embargo la ecuación logística es un ejemplo clásico de que no siempre es así. Si la dinámica es diferente en un modelo u otro, las conclusiones y recomendaciones de política también serán diferentes.

Una tercer línea de investigación es incluir la posibilidad de migración.

Finalmente, una última línea de investigación es el estudio empírico bajo una especificación que sigue el modelo modificado.

References

[1] Accinelli, E. and Brida, J.G. (2006). Crecimiento económico óptimo y crecimiento poblacional: una versión mejorada del modelo de Ramsey. *Papeles de población* 12(47): 227 - 241.

[2] Accinelli, E. and Brida, J.G. (2006). Re-formulation of the Ramsey model of optimal economic growth with the Richards population growth law. *WSEAS Transactions on Mathematics* 5(5): 473-479.

[3] Accinelli, E. and Brida, J.G. (2007). The dynamics of the Ramsey economic growth model with the von Bertalanffy population growth law. *Applied Mathematical Sciences* 1(3): 109–118.

[4] Accinelli, E. and Brida, J.G. (2007). The Ramsey model with logistic population growth. *Economics Bulletin* 3(15): 1-8.

[5] Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (2003). *Economic growth* (Second edition). MIT Press, Boston.

[6] Bay, N. S. (2012). On the attraction of positive equilibrium point in Solow economic discrete model with Richards population growth. *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics* 2(3): 177.

[7] Brida, J.G., Cayssials, G. and Pereyra, J.S. (2015). The Ramsey model in discrete time and decreasing population growth rate. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 22: 97-115.

[8] Brida, J. G., y E. L. Maldonado (2010): Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model. *Applied Mathematical Sciences* 1: 1991-2000.

[9] Brida, J. G., y J. S. Pereyra (2008): The Solow model in discrete time and decreasing population growth rate *Economics Bulletin* 41(3): 114.

[10] Brown, L. R., Gardner, G., Halweil, B., Starke, L. (1998). *Beyond Malthus: Sixteen dimensions of the population problem.* Worldwatch Institute, Washington, DC.

[11] Cai, D. (2012). An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling* 55(3): 432-441.

[12] Cass, D.(1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* 32: 233-240.

[13] Castillo-Chavez, C., and Brauer, F. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology.* Springer, New York.

[14] Cheban, D., Mammana, C., and Michetti, E. (2013). Global attractors of quasi-linear non-autonomous difference equations: A growth model with endogenous population growth. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 14(3), 1716-1731.

[15] Daily, G. C., and Ehrlich, P. R. (1992). Population, sustainability, and Earth's carrying capacity. *BioScience*, 42(10): 761-771.

[16] Ferrara, M. and Guerrini, L. (2009). The Ramsey model with logistic population growth and Benthamite felicity function revisited. *WSEAS Transactions on Mathematics* 8: 41-50.

[17] Ferrara, M. and Guerrini, L. (2012). Hopf bifurcation in a modified Ramsey model with delay. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 68(2): 219-225.

[18] Guerrini, L. (2010). A closed-form solution to the Ramsey model with logistic population growth. *Economic Modelling* 27(5): 1178-1182.

[19] Guerrini, L. (2010). The Ramsey model with AK technology and a bounded population growth rate. *Journal of Macroeconomics* 32(4): 1178-1183.

[20] Guerrini, L. (2010). The Ramsey model with a bounded population growth rate. *Journal of Macroeconomics* 32(3): 872-878.

[21] Guerrini, L. (2010). Transitional dynamics in the Ramsey model with AK technology and logistic population change. *Economics Letters* 109(1): 17-19.

[22] Guerrini, L. (2010). A note on the Ramsey growth model with the von Bertalanffy population law. *Applied Mathematical Sciences* 4(65): 3233-3238.

[23] Guerrini, L. (2010). The AK Ramsey growth model with the von Bertalanffy population law. *Applied Mathematical Sciences* 4(65): 3245-3249.

[24] Guerrini, L. (2010). A Closed-Form Solution to the Ramsey Model with the von Bertalanffy Population Law. *Applied Mathematical Sciences* 4(65): 3239-3244.

[25] Guerrini, L. (2010). A closed-form solution to the Ramsey model with von Bertalanffy population law and Benthamite function. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 45(1): 141-147

[26] Guerrini, L. (2010). The dynamic of the AK Ramsey growth model with quadratic utility and logistic population change. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 62(2): 221-225.

[27] Guerrini, L. (2009). An analytical solution for a model of growth. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 53(4): 523-529.

[28] Guerrini, L. (2010). Logistic population change and the Mankiw-Romer-Weil model. *Applied Sciences* 12: 96-101.

[29] Koopmans, T.C.(1965), On the concept of optimal economic growth. in: Koormans, T.C., ed., *The Econometric Approach to Development Planning.* North-Holland, Amsterdam.

[30] Mankiw, N.G., Romer, D., and Weil, D.N. (1992). A Contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* 107(2): 407-437.

[31] Maynard Smith, J. (1974). *Models in Ecology*, Cambridge University Press, Cambridge.

[32] Patri, S., Di Dio, F., and Correani, L. (2012). Optimal Growth and Migration in a Discrete-Time Ramsey Model: a Note. *Journal of Academic Research in Economics* 1: 1-10.

[33] Ramsey, F.P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal* 38: 543-59.

[34] Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics* 70: 65-94.

[35] United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2015). World Population Prospects: The 2015 Revision, Key Findings and Advance Tables. Working Paper No. ESA/P/WP.241.

[36] Verhulst, P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles* 18: 1-38.

[37] von Bertalanffy, L. (1938). A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. II). *Human Biology* 10(2): 181-213.

[38] Wanxin, W., and Zequn, G. (2013). A Localization of Solow Growth Model with Labor Growth Pattern in China. *Technology and Investment* 4(01), 24.